SOCIAL SCIENCES STUDIES JOURNAL

SSSjournal (ISSN:2587-1587)

Economics and Administration, Tourism and Tourism Management, History, Culture, Religion, Psychology, Sociology, Fine Arts, Engineering, Architecture, Language, Literature, Educational Sciences, Pedagogy & Other Disciplines in Social Sciences

Vol:4, Issue:25 *sssjournal.com*	pp.5367-5377 ISSN:2587-1587	2018 sssjournal.info@gmail.com

Article Arrival Date (Makale Geliş Tarihi) 22/10/2018 | The Published Rel. Date (Makale Yayın Kabul Tarihi) 30/11/2018

Published Date (Makale Yayın Tarihi) 30.11.2018

MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ, MATEMATİK ÖĞRETMENLERİNİN VE AKADEMİSYENİN ÖZELLEŞTİRME BECERİLERİNİN PALİNDROMİK SAYILAR SORUSU İLE İNCELENMESİ

INVESTIGATION OF PRE-SERVICE MATHEMATICS TEACHERS', MATHEMATICS TEACHERS AND ACADEMICIAN'S SPECIALIZATION SKILLS WITH PALINDROMIC NUMBERS QUESTION

Handan DEMİRCİOĞLU

Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi, Sivas/Türkiye

Halid Akif TUNCAY

Silifke Yıldırım Bilgi Merkezi Özel Öğretim Kurumunda Uzman Matematik Eğitimcisi, Mersin/Türkiye-

Article Type : Review Article / İnceleme Makalesi

Doi Number : http://dx.doi.org/10.26449/sssj.1002

Reference : Demircioğlu, H. & Tuncay, H.A. (2018). "Matematik Öğretmen Adaylarının, Matematik Öğretmenlerinin Ve Akademisyenin Özelleştirme Becerilerinin Palindromik Sayılar Sorusu İle İncelenmesi", International Social Sciences Studies Journal, 4(25): 5367-5377

ÖZ

Bu çalışmada matematik öğretmeni adaylarının, matematik öğretmenlerinin ve akademisyenin özelleştirme becerilerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Araştırmanın katılımcıları, matematik öğretmenliği son sınıfa devam eden 2 öğretmen adayı, Anadolu lisesinde görev yapan 2 matematik öğretmeni ve matematik alan derslerine giren Akademisyen (araştırma görevlisi) olmak üzere toplam 5 kişiden oluşmaktadır. Çalışma nitel araştırma yaklaşımlarından durum çalışması ile yapılmıştır. Veriler palindromik sayılar sorusu ile tek oturumda birebir görüşmeler yapılarak toplanmıştır. Elde edilen tüm veriler bilgisayar ortamına aktarılmış, süreç boyunca davranışlar, düşünme süreçleri benzerliklerine göre gruplandırılarak bir perspektif elde edilmiştir. Elde edilen bulgulara göre akademisyen özelleştirmeden direk ispat yaparken diğer katılımcılar ise öncelikle özelleştirme yapmışlardır. Öğretmen adaylarından yalnızca bir tanesi özel değerleri sistematik seçerken, diğerler katılımcılar özel değerleri rastgele seçmişlerdir. Ayrıca öğretmenin biri hariç diğer katılımcılar özelleştirmeyi daha çok iddialarının doğruluğunu göstermek ve kendilerini ikna etmek amaçlı kullanmışlardır.

Anahtar kelimeler: Özelleştirme, Matematiksel Düşünme, Öğretmen Adayı

ABSTRACT

The aim of this study was to investigate the specialization skills of pre-service mathematics teachers, mathematics teachers and academicians. The participants of the study consisted of 5 participants: 2 pre-service teacher in the last year of mathematics education, 2 mathematics teachers in Anatolian high school and an academician (research assistant) delivering mathematics field courses. The study was conducted with case study from qualitative research approaches. The data were gathered by one-on-one interviews with palindromic numbers question. All the data obtained were transferred to computer environment, behaviors throughout the process, thinking processes were grouped according to their similarities and a perspective was obtained. According to the findings, the academician made direct proof without specialization and the other participants primarily made specialization. Only one of the pre-service teachers selected the specific values systematically, while the others selected the specific values randomly. In addition, except for one teacher, the other participants used specialization to demonstrate accuracy of their claims and to convince themselves.

Keyword: Specialization, Mathematical Thinking, Pre-Service Mathematics Teachers

1. GİRİŞ

Matematik bir düşünme dilidir (Umay, 1992) düşünmeyi de geliştiren en önemli araçlardan biri matematiktir (Tural, 2005). Dolayısıyla matematik ile düşünme arasında çift yönlü bir ilişkiden söz etmek mümkündür.

Matematiksel düşünmeyi Alkan ve Bukova Güzel (2005) "düşüncenin yararlılığı, gereksinimlerin karşılanmasında kullanımı ve problemlerin çözümünde üretken olması ile ölçülür. Bu nitelikteki düşünmeye, kısaca Matematiksel Düşünme (MD) denir" şeklinde tanımlamışlardır. Daha genel bir ifade ile tahmin edebilme, tümevarım, tümdengelim, örnekleme, genelleme, analoji, formal ve informal olmayan usavurma, doğrulama ve benzeri karmaşık süreçlerin bir birleşim kümesi (Liu, 2003) problemlerin çözümünde doğrudan veya dolaylı olarak matematiksel tekniklerin, kavramların ve süreçlerin uygulanması (Henderson, 2002) olarak tanımlanmaktadır.

Literatür incelendiğinde matematiksel düşünmeyi tanımlayabilmek için araştırmacıların boyutlarından yola çıktıkları görülmektedir. Matematiksel düşünmenim bileşenlerini, farklı araştırmacılar farklı kabul etmişlerdir. Tall (2002) soyutlama, sentezleme, genelleme, modelleme, problem çözme ve ispat gibi bileşenleri kapsadığını ifade ederken Mason, Burton ve Stacey (2010) da özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma, doğrulama ve ikna etme bileşenlerini incelemişlerdir. Hacısalihoğlu, Mirasyedioğlu ve Akpınar (2003) ise Mason, vd.,'nin çalışmalarına dayanarak ayrıntılamak, genelleştirmek, tahmin etmek ve ikna etmek bileşenlerinden oluştuğunu ifade etmişlerdir. Matematiksel düşünmenin bileşenleri için farklı araştırmacıların eşanlamlı kelimeler (doğrulama ve ikna etme / doğrulama ve inandırma / ispatlama, örnekleme / ayrıntılama / özelleştirme… gibi) kullandıkları görülmektedir. Bu durumun yanı sıra matematiksel düşünmede daha çok özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama bileşenlerinin daha sık kullanıldığı görülmektedir (Arslan ve Yıldız, 2010). Şüphesiz her boyut birbiri ile ilişki içerisinde olup, ayrı ayrı incelenmesi kolay olmamaktadır, fakat özelleştirme boyutu gerek genellemenin, gerek tahminde bulunmanın, gerekse ispat tekniğinin (tümevarım) sık başvurulan bir aşaması olmasından dolayı bu çalışmada, matematiksel düşünme sürecinin alt boyutlarından olan özelleştirme süreci ve becerileri üzerinde incelemeler yapılmıştır.

Özelleştirme, bir genellemeye ulaşmayı sağlayacak kanıtları (örnekleri) bir araya getirme işlemi (Stacey, vd. 1985), genel kuralı daha açık hale getirmek için belli durumlara bakma (Kashefi, vd., 2012) olarak tanımlanmaktadır. Burton (1984) ifade ettiği gibi bir problem ile karşılaştığımız zaman problem durumunu anlamak ve anlamlandırabilmek için belli örnekleri seçmek iyi bir yoldur. Özelleştirme yapılırken; (1) özel değerleri düzensiz bir şekilde ***rastgele (random)*** seçme (problemi anlayabilmek için), (2) düzenli şekilde artan veya azalan bir biçimde, kısacası ***sistematik*** olarak seçme (özel durumu genişletmek için) ve (3*)* ***ustaca*** seçme (genişletme sonucu elde ettiği genelleme veya kuralın doğruluğuna kendini ikna etmek için-genellemeyi kendine ikna etmek için) yapılmaktadır (Mason vd., 2010). Özel durumları rastgele seçmek, problemin anlamlandırma açısından ve bir problemin ya da varsayımın doğru olup olmadığını sezme açısından faydalı bir düşünce olabilir. Ama bir ilişki inceleniyorsa ve başarı elde etme düşünülüyorsa özel durumların sistematik olarak seçilmesi daha faydalı olacaktır (Mason vd., 2010). Özel değerler seçilirken birden fazla örnek verme, bir durumu, problemi tanımlama, gösterme, anlatma, seçme, çizme veya bulma gibi eylemlerden bahsedilir. Dahası bulunulan durum için karşıt veya ilgili örnek bulma, istenilenleri doğru bularak sonucu değişik biçimlerde ifade etme gibi eylemler de özelleştirmede yapılabilir (Arslan ve Yıldız, 2010). O halde, başka bir ifadeyle özelleştirme, bir problem durumunu anlamak ve anlamlandırabilmek için belli ya da sistematik örnekleri seçmek ve problem üzerinde bu örnekleri inceleme anlamına gelmektedir (Keskin, Akbaba Dağ ve Altun, 2013) şeklinde de tanımlanabilir. Yani özelleştirmede bir veya daha fazla örnek verme, bir örneği tanımlama, gösterme, anlatma, seçme çizme veya bulma gibi eylemler söz konusudur (Arslan ve Yıldız, 2010).

İspatın bazı türlerinde ise matematiksel ispatın en alt seviyesi olan pragmatik ispatta örnek vererek yapılan gösterimler şeklindedir (Balacheff, 1987). Çok sık kullandığımız ispat tekniklerinden biri olan "tümevarım" ispat tekniğinde ise n=1 için, n=2 için, n=k için şeklinde, verilen ifadenin doğru olduğunu kabul etme aşamalarında da özelleştirme kullanılmaktadır. Genellemeler de şüphesiz bir özelleştirmelerin ürünüdür. Özel durumlar için yapılan gözlemler genişletilerek genel bir kural olarak ifade edilmektedir (Keskin, vd, 2013). Dahası birkaç örnekten hareketle daha geniş olaylar kümesi hakkında tahminlerde bulunmadır (Mason, vd., 2010). Bu ilişkilerden yola çıkarak gerek ispat tür ve tekniklerinde, gerekse genellemede olsun özelleştirme süreci problemi anlamlandırmak, durumu test etmek ve genel bir kanıya ulaşabilmek için çok sık başvurulan bir süreç olduğu açıktır.

Problem çözme matematiksel düşünmenin gelişiminde de temel süreçtir (Keskin, vd., 2013). Dunlap da (2001) matematiksel düşünme ile problem çözmeyi birlikte ele almaktadır. Rutin olmayan problemler, öğrencinin benzer problemlerin ve algoritmaların parçalarını birleştirerek o probleme özgü bir yöntem geliştirmesini gerektirir. Bir problemin birden fazla yöntemi ve/veya çözümü vardır. Bunun gibi problemler, öğrencilerin bilgiyi sentezlemelerini ve hangi yöntemlerin işe yarayacağını hangilerinin yaramayacağını belirlemede sezgisel atlamalar yapmalarını gerektirir ve öğrencileri matematiksel düşünmeye zorlar. O nedenle problem çözmede öğretmen, yalnızca çözümü değil aynı zamanda söz konusu çözüme ulaşma yollarını da dikkate almalıdır (Dunlap, 2001; Alkan ve Tataroğlu Taştan, 2011). Buradan hareketle yapılan bu çalışmada amaç, öğretmen adaylarının, öğretmenlerin ve akademisyenin matematiksel bir problemle uğraşırken nasıl düşündüklerini ve nasıl çıkarsamada bulunduklarını anlamak, matematiksel düşünmenin özelleştirme boyutu hakkında bilgi edinmek, ipuçları aramaktır.

2. YÖNTEM

Matematik öğretmen adayı, matematik öğretmeni ve bir akademisyenin özelleştirme becerilerinin incelendiği bu çalışmada katılımcılara ait veriler sınırlı bir zamanda elde edildiğinden ve veri toplama araçlarında var olan soru ile sınırlı olduğundan, çalışmada zaman içerisinde sınırlandırılmış bir veya birkaç durumu, çoklu kaynakları içeren veri toplama araçları (gözlemler, görüşmeler ve görsel-işitsel dokümanlar) ile bir fenomenin bir ya da birkaç örneğinin derinlemesine çalışıldığı, durumların ve duruma bağlı temaların tanımlandığı nitel bir yaklaşım olan durum çalışması kullanılmıştır.

3. ÇALIŞMANIN KATILIMCILARI

Çalışmanın katılımcılarını Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı'nda son sınıfta öğrenimine devam eden gönüllü iki matematik öğretmen adayı, Anadolu lisesinde görev yapan iki matematik öğretmeni ve bir akademisyen olmak üzere toplam 5 katılımcı oluşturmaktadır. Çalışmanın amacı dikkate alındığında katılımcıların süreç boyunca tüm etkinliklere katılmaya istekli ve gönüllü olmalarına özen gösterilmiştir. Gönüllü olan öğretmen ve öğretmen adaylarının seçiminde cinsiyet ve eğitim durumları dikkate alınmıştır. Bu doğrultuda öğretmen ve öğretmen adaylarından bir bayan bir erkek çalışmaya katılmıştır. Diğer taraftan akademisyenin doktora tez aşamasında olmasına paralel olarak öğretmenlerden birisinin yüksek lisans yapmış olması dikkate alınmıştır. Çalışmaya katılan öğretmen adayları, öğretmenler ve akademisyenin hiçbir şekilde isimlerinin deşifre edilemeyeceği söylenmiştir ve çalışmanın etiği açısından katılımcıların ismi gizli tutulmuştur. Öğretmen adayları için ÖA1 ve ÖA2, öğretmenler için Ö1 ve Ö2 ve akademisyen için A1 şeklinde isimlendirme yapılmıştır. Tablo 1'de çalışmanın katılımcıları ile ilgili bilgiler verilmiştir.

Tablo 1. Çalışmanın Katılımcıları

Katılımcı	Hizmet Yılı	Eğitim Durumu	Mesleği	Cinsiyet
A1	5	Doktora (Tez Aşaması)	Araştırma görevlisi	Erkek
Ö1	13	Yüksek lisans	Öğretmen	Erkek
Ö2	12	Lisans	Öğretmen	Bayan
ÖA1	-	5. Sınıf	Öğrenci	Erkek
ÖA2	-	5. Sınıf	Öğrenci	Bayan

Tablo 1'den görüldüğü gibi çalışmaya katılan öğretmenler 12 ve 13 yıllık öğretmenlik yapmaktadır. Birisi yüksek lisans diğeri lisans diplomasına sahiptir.

4. VERİ TOPLAMA SÜRECİ VE VERİLERİN ANALİZİ

Veri toplamak için kullanılacak soru seçilirken önce Mason vd. (2010) tarafından yazılmış olan "*Thinking Mathematically*" adlı kaynaktan özelleştirme ile ilgili problemlerden oluşan bir soru havuzu oluşturulmuş ve uzman görüşleri doğrultusunda Palindromik sayı sorusu seçilmiştir. Bu soru *"12321 şeklinde tersten okunuşu da aynı olan sayılara palindromik sayılar denir. Dört basamaklı tüm palindromik sayıların 11 ile bölünebilir olduğu sizce doğru mudur? Açıklayınız*" şeklindedir. Sayısal örnekler yardımı ile özel durumlardan yola çıkılarak genelleme yapılıp çözülebileceği gibi direk genellemeden yola çıkarak bir cebirsel ifade (abba) yazılarak da çözülebilmektedir. Bu sorunun sorulma amacı katılımcıların soruya nasıl yaklaştıklarını incelemektir. Veriler tek oturumda toplanmıştır. Her bir oturum katılımcıların uygun olduğu zaman dilimlerinde randevu alınıp her bir katılımcı ile ayrı ayrı görüşülerek yapılmıştır. Katılımcılara veri toplama süreci boyunca oturumun kameraya alınacağı belirtilmiş ve hiçbir katılımcı tedirginlik duymamıştır. Sadece kamera kayıtlarında yüzleri çekilmemeye özen gösterilmiştir. Oturum boyunca kâğıt ve kalem hazır olarak verilmiştir. Çözüm süreci boyunca düşündükleri her şeyi ifade etmeleri istenmiştir. Çözüm yaptıkları kâğıtları alınmıştır. Görüşmelerde yapılan video kayıtları incelenerek deşifre edilmiş, yazılı hale getirilmiş, katılımcıların teslim ettikleri çözüm kâğıtları ile birlikte bilgisayar ortamına aktarılmıştır. Araştırma sürecini daha iyi yansıtabilmek, katılımcıların süreç içindeki düşünme yaklaşımlarını daha iyi izleyebilmek ve karşılaştırmalar yapabilmek için her bir katılımcı için bulgular ayrı ayrı verilmiştir ve daha sonra karşılaştırmalar yapılmıştır. Bu sayede benzerlikler ve farklılıklar ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Her bir özelleştirme davranışı belirlenmiştir.

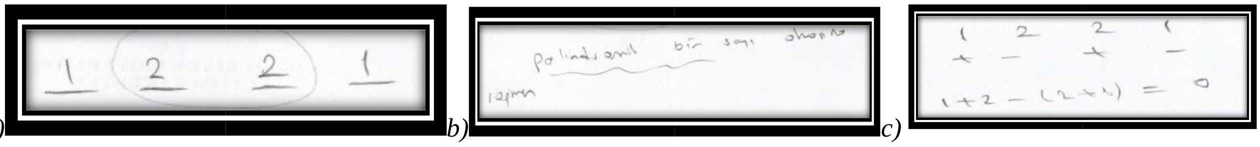
Güvenirliği arttırmak için, araştırmacı takip ettiği süreçleri açık bir biçimde tanımlamış ve ilgili dokümanlar (Mason, vd., 2010) ile desteklemiştir. Ayrıca güvenirliğinin sağlanması için öncelikle araştırmanın veri kaynağı olan öğretmen adayları, öğretmenler ve akademisyen açık bir biçimde tanımlanmıştır. Araştırmanın yöntemi, aşamaları, veri toplama ve analiz yöntemleri ile bulguları yorumlama ve sonuçlara ulaşma konusunda neler yapıldığı açıklanmıştır. Gözlem, görüşme ve dokümanlar yoluyla elde edilen veriler, doğrudan alıntılarla açıklanmıştır. Görüşme yöntemiyle elde edilen bulgular, gözlem ve doküman analizi yöntemleriyle elde edilen bulgularla teyit edilerek, sonuçlar değerlendirilmiştir.

5. BULGULAR VE YORUM

Bu bölümde araştırmada elde edilen verilerin, veri analizi bölümde belirtilen yöntem ve teknikler kullanılarak yapılan analizleri ve deşifreleri sonucunda ulaşılan bulgulara yer verilmiştir. Her bir katılımcının süreç boyunca ne düşündükleri ve sonuca nasıl ulaştıkları önce tek tek incelenmiş, ayrı ayrı başlıklar halinde verilmiş daha sonra birlikte yorumlanmıştır.

A1'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

A1 soruyu hızlıca okuduktan sonra palindromik sayının basamak sayısı hakkında dönüt almak için *"Bu soruyu bir düşünürsek. Burada basamak sayısının dört basamaklı olması kesin değil mi?"* diye sormuştur. Bir müddet düşünmüş ve *"Acaba **ters bir örnek** bulabilir miyiz bu soruda. Yani dört basamaklı olup palindromik olup 11 ile bölünemeyen bir sayı olabilir mi. Şöyle bir düşünürsek… mesela **1221** sayısını aldığımızda, tersten okunuşu da aynıdır. Ama **11 ile bölünemeyen bir sayıdır**"* şeklinde ifade etmiştir. Bu özel değeri ve düşüncesini sırası ile cevap kâğıdına Şekil 1a ve Şekil 1b deki gibi yazmıştır. Daha sonra özel olarak almış olduğu sayının ters örnek olup olmadığını "*11 ile bölünebilme kuralı +-+- diyorduk. Dolayısıyla 1+2- dediğimizde* (Şekil 1c) *11 ile bölünebilen bir sayı çıktı. Burada bir sıkıntımız görünmüyor"* şeklinde ifade ederek kontrol etmiştir.


a) b) c)

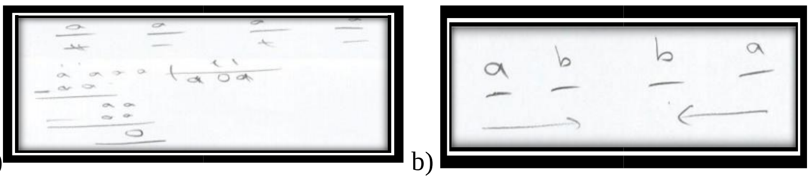
Şekil 1 A1'in incelediği ilk örnek, kâğıda yazdıkları ve bu örneğe 11 ile bölünebilme kuralını uygulaması

Almış olduğu özel değerin beklentisini karşılamaması üzerine bir müddet düşünmüştür. Düşüncelerini aşağıda ki şekilde ifade etmiş, aynı zamanda araştırmacı işlemlerin anlaşılırlığı için A1'e bazı sorular yöneltmiştir.

A1*: Şimdi **rakamların hepsi aynı olsa** zaten bir sıkıntımız yok, hepsi **11 ile bölünebilir** **(genelleme)***

ARAŞTIRMACI*: Bu kanıya nerden vardınız?*

A1*: Şimdi baktığımız anda **aaaa** yani bütün a'lar birer rakam olmak üzere +-+- verdiğimizde. Aynı 11 ile bölünebilme kuralını görebiliriz, ya da herhangi bir aaaa sayısını 11 ile böldüğümüzde, normal bölme yaptığımızda* (Şekil 2a) *a0a defa var. **Tam bölünebilir.** Dolayısıyla palindromik sayıda şu ikinci ve üçüncü rakamlarda aynı olması, yani bir kere ne olması lazım dört basamaklı sayıda palindromik olarak ifade edilebilmesi için birinci basamakla son basamağın bir kere aynı olması lazım, aynı harfler ile sembolize etmemiz lazım, aynı rakam olarak ifade edilebilmesi için... Palindromik sayı olduğu için dolayısıyla bu ikinci basamak ile üçüncü basamağın aynı rakamları ifade etmesi lazım, o da bb çünkü okunuşunun aynı olabilmesi için* (Şekil 2b-**abba** alıyor) *buradan da ve buradan da okunuşları aynı olabilmesi için rakamların. Dolayısıyla bu, 11 ile bölünebilme kuralı gereği, 11 ile bölünebilen bir sayıdır. Dolayısıyla **4 basamaklı palindromik sayıların 11 ile bölünebildiğini bu şekilde görebiliriz.(Genelleme)***


a) b)

Şekil 2 A1'in cebirsel ifadeye 11 ile bölünebilme kuralı ve bölme işlemi uygulaması ve palindromik sayıyı cebirsel gösterimi

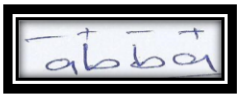
Görüldüğü gibi A1 problemi çözerken dört basamaklı palindromik sayıyı cebirsel olarak ifade etmiştir. Daha sonra bu cebirsel ifadeye Şekil 2a'daki gibi 11 ile bölme ve bölünebilme "kuralı" gereği +,-,+,-, şeklinde gruplandırmış, 4 basamaklı tüm palindromik sayıların 11 ile bölünebileceği sonucuna ulaşmıştır.

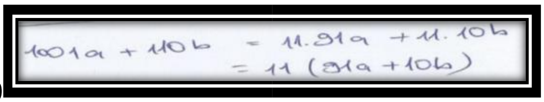
A1'den elde edilen bulgular özetlenirse; A1 soruyu okuduktan sonra ilk önce ters örnek bulmaya çalışmıştır. Bunun için "1221" palindromik sayısını göz önüne almıştır. Ters örnek arama düşüncesinden hareketle bu özel değerin 11 ile bölünemeyen bir sayı olduğunu ifade etmiştir. Daha sonra vermiş olduğu ters örneğe 11 ile bölünebilme kuralını uygulamıştır fakat sayının 11 ile bölünebildiğini gördükten sonra genelleme yapmıştır ve dört basamaklı tüm palindromik sayıların 11 ile tam bölünebileceğini ifade etmiştir. Araştırmacının "*bu kanıya nasıl vardınız*" sorusu üzerine, A1 vermiş olduğu örnekten faydalanarak dört basamaklı palindromik sayıları genelleyerek cebirsel olarak önce aaaa sonra abba şeklinde ifade etmiştir. Daha sonra bu cebirsel ifadeleri 11 ile bölmüş ayrıca 11 ile bölünebilme kuralını (+,-) uygulamış ve 11'e tam olarak bölünebileceğini göstermiştir. Sonuç olarak A1 bu soruda özelleştirmeyi, palindromik sayıyı anlama ve 11 ile bölünebilmeye ters örnek aramak için kullanmıştır. Sonra genelleme yapmış bölünebildiğini ifade etmiştir.

Ö1'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Ö1 soruyu okuduktan hemen sonra ilk olarak kâğıdına Şekil 3a'daki gibi dört basamaklı palindromik sayının cebirsel ifadesini yazmıştır. Daha sonra istenilen "*dört basamaklı palindromik sayıların 11 ile bölünebilir olduğu doğru mudur?*" sorusu üzerine Şekil 3b' deki gibi yazmış olduğu cebirsel ifadeyi 11 ile bölünebilme kuralı gereğince +,- biçiminde gruplandırarak "*doğrudur, çünkü 11'e bölünmesi için kalan 0 çıkar.*" şeklinde ifade etmiştir. Ö1'in bu ifadesinden sonra daha detaylı bilgi almak için araştırmacının "*bunu kâğıda açıklayarak yazabilir misiniz?*" sorusu üzerine, Ö1 bir önceki ifadesinden, 11 ile bölünebilme kuralı yerine farklı bir gösterimle Şekil 3c deki gibi çözümleme yapmıştır.

a) 

b) 

c) 

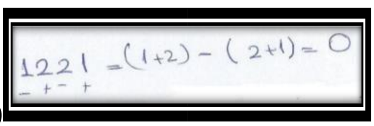
Şekil 3 Ö1'in kâğıdına ilk yazdığı palindromik cebirsel ifadesi, bölünebilme kuralı uygulaması, çözümlemesi

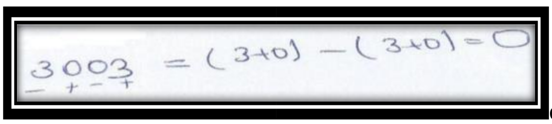
Ö1'in ifade etmiş ve yazmış olduğu işlemlerden sonra araştırmacının "*önce sayıyı cebirsel şekilde ifade edip 11'e bölünebilme kuralından +- şeklinde gruplandırdınız, daha sonra çözümleme yaparak soruyu cevaplandırdınız, başka aklınıza farklı bir çözüm yolu geliyor mu?*" sorusu üzerine, Ö1 " *başkada gelmiyor açıkçası*" şeklinde yanıtlayarak diğer soruya geçmiş, çözümü sonlandırmıştır.

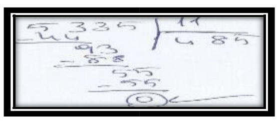
Ö1 'in bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse; Ö1 soruyu okuduktan sonra ilk olarak dört basamaklı palindromik sayıları "abba" biçiminde göstermiştir. Fakat bu genellemeyi özelleştirme gerçekleştirmeden yapmıştır. Daha sonra yazmış olduğu cebirsel ifadesini, 11 ile bölünebilme kuralı kullanarak 11'e tam bölünebileceğini ifade etmiştir. Bu ifadesini kâğıdına yazarken ise "abba" şeklinde ki cebirsel ifadesini çözümleyerek farklı bir çözüm gerçekleştirmiştir. Ayrıca Ö1 diğer katılımcılar arasından bu soruyu 2 dakika gibi en kısa sürede cevaplandıran Ö1 olmuştur. Bunu da dört basamaklı palindromik sayıyı hızlı bir şekilde "abba" şeklinde cebirsel olarak (genelleyerek) ifade etmesinden dolayı olduğu söylenebilir. Bunun yanı sıra ne soruyu anlamlandırmak ne de genel ifadesinin doğruluğunu göstermek adına özel değer kullanmaması dikkat çekici bulgudur. Oysaki gerek cebirsel ifade olsun gerekse 11 ile bölünebilme kuralı olsun birer genellemedir. Genellemeler ise özelleştirmelerin birer ürünüdür. Dolayısıyla Ö1 mevcut genel kuralların özelleştirmenin önüne geçtiğini, hatta araştırmacının "*bu çözümler dışında başka nasıl gösterebiliriz*" şeklinde sorusu üzerine Ö1'in " *aklıma başka bir şey gelmiyor*" şeklinde ifadesinden özelleştirmeye engel olduğu söylenebilir.

Ö2'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Ö2 soruyu hızlıca okuduktan sonra bir müddet düşünmüştür. Düşüncelerini ise "*dört basamaklı… tersten okunuşları… (soruda verilen örneğe bakarak) bu beş basamaklı… tamam, dört basamaklı tüm palindromik sayıların 11 ile bölünebilir olduğunu… hmmm sizce doğru mudur açıklayınız diyor.*" şeklinde dile getirmiştir. Daha sonra cevap kâğıdına 11 ile bölünebilme kuralından faydalanarak Şekil 4' deki ifadeyi yazmıştır.

a) 

b) 

c) 

Şekil 4. Ö2'nin sırasıyla incelediği örneklere 11 ile bölünebilme kuralını uygulaması

Bu ifadeyi yazarken aynı zamanda "*Evet doğru çünkü farkları "0" ediyor. "0"da 11'e bölünür.*" şeklinde açıklamada bulunmuştur. Daha sonra sorunun çözümünü sonlandırdığını düşünmüş ve araştırmacıya bakmıştır. Araştırmacı çözümü derinlemesine incelemek adına Ö2 ile aşağıda ki şekilde diyalog gerçekleştirmiştir.

Araştırmacı: *peki hocam, Sizce 1 tane örnek yeterli midir?*

Ö2: *Yeterli değildir. Mesela 3003 diyelim.* (Şekil 4.b) *Artı, eksi, artı, eksi, diyelim. Yine 0 çıkıyor. Her halükarda zaten 0'ı verecekler çünkü dört basamaklı.*

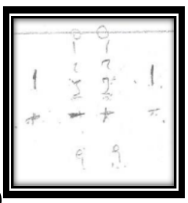
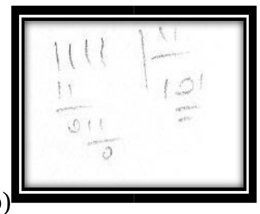
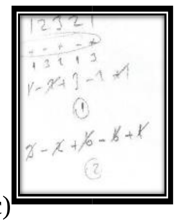
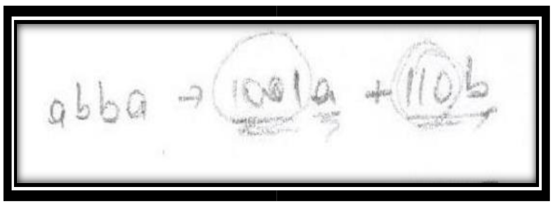
ARAŞTIRMACI: *Peki. Farklı şekilde çözebilir misiniz hocam? Aklınıza başka bir şey geliyor mu*?

Araştırmacının bu sorusu üzerine Ö2 bir müddet düşünmüş, soruyu tekrar okumuştur. Bu sırada araştırmacı "*Yani bir iki tane örnek vererek mi çözebiliriz*?" şeklinde soru yöneltmiştir. Bunun üzerine, Ö2 "*Direk bölebilirsin. Mesela başka bir sayı 5335 olsun."* ifadesinde bulunmuş ve Şekil 4.c deki gibi 11 ile bölme işlemi gerçekleştirmiştir. İşlemi bitirdikten sonra "*Her hâlükârda kalan sıfır olduğu için tam bölünür*" açıklamasında bulunmuş, soruyu tekrar okumuş ve var olan sonucu "*doğrumu dur doğrudur* (Şekil 4.40.) *diyeceğiz*" şeklinde ifade ederek cevabı sonlandırmıştır.

Ö2 'in bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse; Ö2 soruyu okuduktan sonra ilk olarak "1221" özel durumuna bakmıştır. 11 ile bölünebilme kuralını kullanmış, bu sayının 11'e tam olarak bölünebileceğini ifade etmiştir. Araştırmacının "*bir örnek yeterli mi*" sorusu üzerine, Ö2 "*yeterli değildir*" yanıtını vermiş başka bir özel değer (3003) daha almış ve aynı şekilde kural kullanarak o sayınında 11 ile bölünebileceğini ifade etmiştir. Daha sonra araştırmacının *"kural dışında başka bir çözüm şekli ile gösterebilir misiniz?*" sorusu üzerine, Ö2 tekrar farklı bir özel değer alarak bu sefer normal 11 ile bölme işlemini gerçekleştirmiştir. İşlemini bitirdikten sonra ise "*dört basamaklı tüm palindromik sayılar 11 ile tam bölünür. Evet, doğrudur*" şeklinde ifade etmiş ve soruyu sonlandırmıştır. Görüldüğü üzere Ö2 almış olduğu özel değerleri soruyu *anlamlandırmak* ve *doğruluğunu göstermek* adına rastgele seçmiş olduğu söylenebilir. Kural dışında farklı bir çözüm arayışı içerisine girdiği zaman ise yine rastgele özel bir değer almış ve bölme işlemi gerçekleştirmiştir. Ayrıca 2 dakika gibi kısa bir sürede soruyu cevaplandırmıştır. Tabii diğer katılımcılara göre bu kadar kısa sürede cevaplandırmasının sadece iki özel değer için, 11 ile bölünebilme kuralını ve bir özel değer içinde normal bölme işlemi gerçekleştirmesinden dolayı olduğu söylenebilir. Kısacası Ö2 özelleştirmeyi sadece soruyu anlamlandırma ve bir iki tane özel değerin tüm dört basamaklı palindromik sayıların genel durumunu kapsayacağı düşüncesini açıklamak için kullandığı söylenebilir. 11 ile bölünebilme kuralı dışına çıkamamıştır. Dolayısıyla sistematik özel değerler arama ve artış miktarına göre örüntü oluşturup genel kanıya varma gibi davranışlarda bulunmadığı söylenebilir.

ÖA1'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

ÖA1 soruyu önce okumuş, bir müddet sessizce düşündükten sonra düşüncelerini; "*aslında 3 basamaklı olsa şey vardı, sağ ile solların toplamı eğer ortada ki sayıyı veriyorsa, ya da sağ ile solun toplamı 11'i geçiyorken, 11 eksiği ortada ki sayıyı veriyorsa, o sayı 11'e bölünüyordu ama 4 basamaklı sayılarda bunu hiç düşünmedim. Dört basamaklı palindromik sayı nasıl olabilir ki başta ve sonra aynı olacak bir kere baştaki sayı 1 ise sonda ki sayıda 1 olmak zorunda. 4 basamaklı bir sayı o zaman şuraya (iki tane 1'in arasını göstererek) ne yazarsak*" şeklinde ifade etmiştir. Araştırmacının bu düşüncelerini kâğıda yazmasını istemesi üzerine ÖA1 kâğıdına Şekil 5a daki gibi açıklamıştır. Daha sonra da "*Başta 1 varsa sonda da 1 vardır dedik tersten aynı okunabilmesi için, sonra şurada ki sayıyla şurada ki sayıda aynı olmalı (onlar ve yüzler basamağını göstererek) rakamları farklı demiyor sanırım. Yok, rakamları farklı demiyor, yani şu araya* (Şekil 5a*) en azından 11,22,33… 99 kadar geleceğim.* " ifade etmiştir.

a)  b)  c)  d) 

Şekil 5 ÖA1'in incelediği palindromik sayılar, 11 ile bölme uyguladığı birinci örneği, incelediği 5 basamaklı palindromik sayı, cebirsel ifade ve çözümlemesi

Daha sonra yazmış olduğu bu sayıların 11 ile bölünüp bölünemeyeceğini; "*tabii şimdi burada 11 ile bölünebilme kuralını oluşturmam lazım yoksa her bir sayı için 9 kere deneyeceğim birde "00" da var tabi hatta 10 kere deneyeceğim. Bunu 9 kere buradan 90 tane sayı gelecek muhtemelen. Evet 90 tane sayının teker teker 11 ile bölünebiliyor mu diye denemek çok saçma. Bunun için bir yöntem bulmak lazım. O yüzden 11 ile bölünebilme kuralı neydi?"* şeklinde ifade etmiştir. Bu açıklamasından sonra 11 ile bölünebilme kuralını hatırlamaya çalışmıştır. Hatırlama aşamasını ise *"+,-,+,- diye yazıyorduk. 7 ile bölünebilme kuralında mıydı bu yoksa 11 ile bölünebilme kuralında mıydı? O 3-2-1'miydi!! Yok*" biçiminde gerçekleştirmiştir. (*kuralı hatırlamak için sesli düşünüyor, bu sırada anlamsız cümleler kuruyor yani 7 ve 11 ile bölünebilme kurallarını irdeliyor).* Burada 7 ve 11 ile bölünebilme kuralını karıştırmıştır. 11 ile bölünebilme kuralının hangisi olduğunu hatırlamak için kâğıdına Şekil 5b. deki gibi bir sayı alarak 11'e bölmüştür. Araştırmacı ÖA1'in yaptığı bu işlemleri açıklaması için "*şuan ne yapıyorsunuz?"* sorusunu yöneltmiştir. ÖA1 bu soru üzerine "*11 ile bölünebilme kuralını hatırlamaya çalışıyorum. 7 ve 11 de biz bunu yapıyorduk +,-,+,- yapıyorduk, fakat bir tanesinde gruplayıp soldan sağa doğru 3-1-2-3-1-2 diye yazıyorduk. Ondan sonra bunları çarpıyorduk. O 7 ile bölünebilme kuralında mıydı, 11 ile miydi sanırım, 11 de direk +,- yazıyorduk, 3-2-1 diye gitmiyorduk*" şeklinde cevaplamıştır. Daha sonra 11 ve 7 ile bölünebilme kuralını sırasıyla +,- ve 1-3-2 gruplandırma metodunu Şekil 5c 'deki gibi beş basamaklı palindromik sayıya uygulamıştır. Dolayısıyla bu aşamada kuralı doğru hatırlayıp hatırlamadığını emin olmak için özelleştirme gerçekleştirdiği söylenebilir. Bu uygulama sonucunda ÖA1 *"sadece 11 ile bölünebilme kuralını elde etmeye çalışıyorum*." ifadesinde bulunmuştur. Yaptıkları bu işlemlerden sonra, "+,-" olan kısmı göstermiş ve *"muhtemelen buydu*" diyerek, 11 ile bölünebilme kuralının "+,-" gruplama metodunun olduğunu belirtmiştir. Daha sonra "*bunun üzerinden devam etsek, +,- olarak yazdığımızı düşünsek, dört basamaklı bir sayıda +,-,+,- diye yazdığımda ne olacak, şununla şu sayısal değer olarak şununla da ortada ki birbirini götürecek ve "0" oluşacak, muhtemelen, o zaman her palindromik sayı "0" olduğu için 11 ile bölünecek*." şeklinde dört basamaklı her palindromik sayının 11 ile tam olarak bölünebileceğini ifade etmiştir. Söylenenleri teyit etmek ve toparlamak adına araştırmacı ile ÖA1 arasında aşağıda ki şekilde diyalog gerçekleşmiştir.

ARAŞTIRMACI*: Cevabın doğru olduğunu 11 ile bölünebilme kuralından mı söylüyorsunuz?*

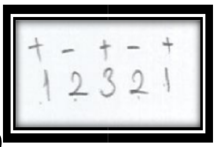
AÖ1*: Evet, 11 ile bölünebilme kuralı +,- idi dört basamaklı bir palindromik sayı elde edebilmek için, başa ne yazdıysam sona da bir kere aynısını yazmak zorundayım ki tersten okunuşu da aynı olsun, dört basamaklı bir sayıda (ortaları göstererek) buraya da mecburen aynı sayıları yazmak zorundayım ortada ki iki taneyi, yani onlar ve yüzler basamağında aynı sayıyı yazmak zorundayım. O zaman ne olacak altına bir artı bir eksi yazarak 11 ile bölünebilme kuralını düşünsem, sağ sol birbirini götürmüş olacak, toplam her türlü sayısal değer olarak "0" olacak, yani ne olacak rakamlar toplamı "0" eşit olacak bu kurala göre düşündüğümüz zaman, o zamanda 11 ile bölünebilme kuralını sağlayacak, demek ki bütün sayılar 11 ile tam bölünebiliyormuş.*

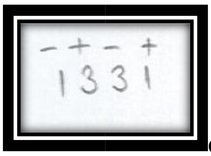
Yukarıda ki açıklamadan sonra araştırmacı 11 ile bölünebilme kuralı dışında farklı bir düşünme beklentisinden "*peki biz 11'ile bölünebilme kuralını bilmiyoruz, o zaman nasıl çözebiliriz bu soruyu?*" şeklinde soru yöneltmiştir. ÖA1 bu soru üzerine ilk başta bulmuş olduğu 90 palindromik sayı ifadesini göstererek "*90 tanesini denemekte bir yol ama çok uzun bir yol, 11 ile bölünebilme kuralını bilmezsek…*" şeklinde ifade de bulunmuş ve düşünmeye başlamıştır. Bir müddet düşündükten sonra "*çözümleme yapsak acaba olur mu diye düşünüyorum ama muhtemelen çözümlemede de çok fazla bir şey çıkmayacak gibi. abcd dört basamaklı sayı, olamaz… abba 4 basamaklı sayısı ancak olabilir palindromik kuralını sağlaması için. O zaman bunu çözümlesek*" diyerek kâğıdına Şekil 5d deki gibi yazmıştır. Devamında "b*urada ki sayılar (1001 ve 110) 11'in bir katı olduğu için, a'dan b'den bağımsız zaten her türlü 11 ile bölünecek*" şeklinde açıklamıştır. Araştırmacının "*daha başka, farklı çözümler aklınıza geliyor mu?*" sorusuna ÖA1 "*valla 90'nını da yazıp denerim, başka 3. yolda o olur. Başkada ciddi ciddi aklıma bir şey gelmiyor*" şeklinde cevap vermiştir ve süreç sonlandırılmıştır.

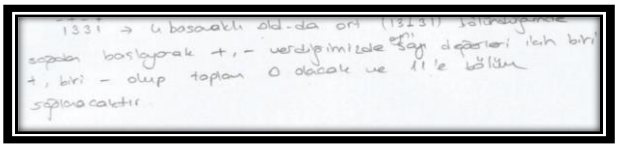
ÖA1'in bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse; ÖA1 soruyu okuduktan sonra "*3 basamaklı olsaydı, hemen cevaplandırırım, kuralını biliyorum*" şeklinde ifadede bulunmuş, "*acaba o kural 4 basamaklılarda da geçerli mi?"* diyerek bir müddet düşünmüştür. Görüldüğü üzere ÖA1 soruyu okuduktan sonra 3 basamaklı sayıların 11 ile tam olarak bölerken uyguladığı yöntemi açıklamıştır. Bu açıklamasında aslında 11 ile bölünebilme kuralını açıkladığı söylenebilir. Fakat bahsettiği kuralın 11 ile bölünebilme kuralı olduğunu belirtmemiş daha sonra 11 ile bölünebilme kuralını hatırlama çabası içerisine girmiştir. Buradan ÖA1 üst bilişsel olarak kuralın farkında olmadığı söylenebilir. Daha sonra bu ifadesinden yola çıkarak dört basamaklı sayılar içinde aynı kuralın geçerli olup olmayacağını kendince sorguladığı görülmektedir. Daha sonra dört basamaklı palindromik sayının tanımını ifade etmiş ve palindromik sayıların bir kısmını yazmıştır. Bir müddet düşündükten sonra dört basamaklı palindromik sayı sistemini irdeleyerek özelleştirme gerçekleştirmiştir. Özel değerleri yazarken, *en küçük dört basamaklı palindromik sayıyı yazması dikkat çekicidir.* Yani palindromik sayıları sistematik bir şekilde yazmıştır. 90 tane böyle sayı yazılabileceğini belirtmiştir. Muhtemelen bunu, yazmış olduğu özel değerlerden yola çıkarak tüm rakamlar için palindromik kuralını uygulayarak bu sonuca vardığı söylenebilir. Fakat bu sayıların 11 ile bölünebilir olduğunu göstermemiştir. Bu yüzden 11 ile bölünebilme kuralını hatırlamaya çalıştığı söylenebilir. Araştırmacının bu düşüncelerini açıklayarak kâğıda yazmasını istemesi üzerine ÖA1 11 ile bölünebilme kuralından bahsetmeye başlamıştır. Fakat kuralı tam olarak hatırlayamamıştır. Kısa bir süre düşündükten sonra 11 ve 7 ile bölünebilme metodundan (+,- ve 1-3-2 gruplandırması) bahsetmiştir. Fakat hangi metodun hangi bölünebilme kuralına ait olduğunu tam olarak belirtememiştir. Bunun üzerine hatırlamış olduğu kuralları birer özel değer alarak uygulamıştır. Burada ise var olan genel bir kuralı *anlamlandırmak* adına özelleştirme kullandığı söylenebilir. Uygulama sonunda 11 ile bölünebilme kuralının +,- şeklinde gruplama metodu olduğuna karar vermiştir. Daha sonra dört basamaklı palindromik sayı tanımıyla birlikte 11 ile bölünebilme kuralını açıklamış, dört basamaklı palindromik sayıların 11 ile tam olarak bölünebileceğinin doğru olduğunu belirtmiştir. Araştırmacının "*farklı şekillerde, kural kullanmadan cevaplandırabilir misiniz*" sorusu üzerine "*90 sayının hepsini denerim*" şeklinde cevap vermiştir. Daha sonra bir müddet düşünmüş ve çözümleme yaparak göstermeye karar vermiştir. Çözümleme yapabilmek için 4 basamaklı sayıyı "abcd" şeklinde cebirsel olarak ifade etmiştir. Fakat kısa bir süre sonra almış olduğu sayının palindromik olmadığını fark etmiş ve cebirsel ifadesini "abba" şeklinde düzeltmiştir. "abba" ifadesini çözümledikten sonra cebirsel terimlerin katsayılarını "1001 ve 110" olduğunu belirtmiş, 11 ile bölünebileceğini söylemiştir. Araştırmacının "*başka farklı çözümler var mı?*" sorusu üzerine ÖA1 "*Başkada ciddi ciddi aklıma bir şey gelmiyor*" ifadesinde bulunmuş ve cevabını sonlandırmıştır.

ÖA2'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

ÖA2 soruyu hızlıca okumuş, okuduktan sonra ilk düşüncesini *"+,-,+,- demi 11 ile bölünebilme kuralı oydu*" şeklinde 11 ile bölünebilme kuralını hatırlamaya çalışmıştır. Daha sonra kuralın "+,-" şeklinde olacağı düşüncesiyle Şekil 6a'daki gibi 12321 sayısına uygulamıştır.

a) 

b) 

c) 

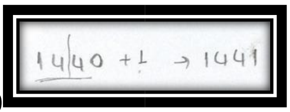
Şekil 6 ÖA2'nin incelediği örnekler

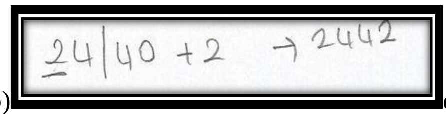
Almış olduğu özel değere bakarak "*hayır… 11 ile bölünebilme kuralı bu muydu? 5-4 oluyor, 5-4=1 11 ile bölünmüyor, 0 çıkmadı. 0 çıkması gerekmiyor muydu?*" şeklinde kendine sorular yöneltmiştir. Gerçekleştirdiği işlemlere baktıktan bir müddet sonra "*Aaa!!! Dört basamaklı diyor burada, ben beş basamaklı aldım. Dikkat etmedik. Mesela...*" ifadesinde bulunmuş, vermiş olduğu değeri silmiş, yerine Şekil 6b'deki sayıyı yazmıştır. Daha sonra bu düşüncelerini Şekil 6c 'deki gibi kâğıdına açıklayarak yazmıştır. Yapılan işlemlerin anlaşılırlığı ve özetlenmesi adına araştırmacı ile ÖA2 arasında aşağıda ki diyalog gerçekleşmiştir.

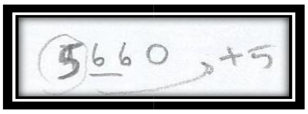
ARAŞTIRMACI: *Yani senin için 1331 sayısı 11 ile bölünebilme kuralıyla +,- yaptığımız zaman kalan "0" 11'in katı olduğu için bölünebildiğini söyledin bunu tüm palindromik sayılar için de söyleyebiliyorsun öyle mi*?

ÖA2: *Öyle olduğuna inanıyorum. Çünkü dediğim gibi dört basamaklı olduğu için ortadan ikiye böldüğüm zaman, iki sağda iki solda yaptığım zaman, bu sayıların değerleri aynı olacak ki zaten ortadan ikiye böldüğümde… aynı olacak çünkü palindromik sayı olabilmesi için, o şekilde olması gerek. Yani ortadan ikiye böldüğüm de sağlı sollu, nasıl deyim… Ayna gibi düşün ortadan ikiye böldüğümüz zaman, yansıması gibi olması gerekiyor. Böyle olduğunda da sağdan başladığım zaman +,- bence hepsi sağlar yani.*

Araştırmacı 11 ile bölünebilme kuralı dışında farklı bir düşünme yaklaşımı beklentisinden hareketle**;** "*Sende ilk başta söyledin 11 ile bölünebilme kuralı dedin. Peki, sen bu kuralı bilmesen, bilmiyor olsan. Dört basamaklı palindromik sayıların 11 ile bölünebilir olup, olmadığını söyleyebilir misiniz bana. Başka bir şey geliyor mu aklına*" şeklinde ÖA2'ye soru yöneltmiştir. Bu soru üzerine ÖA2 bir süre düşünmüş, daha sonra "*10 bölünebilen sayıların, +1 eklenmiş şekilde, ama o zaman hem sağına hem soluna eklemem lazım*" ifadesinde bulunmuştur. Bu ifadesini açıklaması istendiğinde "*Yani 10 bölünen bir sayı bulacağım önce. Atıyorum* (Şekil 7a) *1440 sayısı 10'a bölünüyor, bunun palindromik sayı olabilmesi için +1 olması lazım ki bölünebilsin. Yani böyle olması lazım*" ifadesinde bulunmuştur.

a) 

b) 

c) 

Şekil 7. ÖA2'nin kuralı için incelemiş olduğu özel değerler

Daha sonra belirtmiş olduğu bu yeni kuralını, başka bir özel değer alarak ve Şekil 7b deki gibi kâğıdına yazmış "*2440 mesela 10 bölünüyor, binler basamağındaki sayıyı eklediğim zaman yine bölünüyor olması lazım*." şeklinde açıklamıştır. Daha sonra araştırmacı "*başka şeyler geliyor mu aklınıza*" sorusunu yöneltmiştir. ÖA2 bir önceki kendi geliştirmiş olduğunu düşündüğü kuraldan yola çıkarak "*Ya da 12'ye bölünebilme desem ama o karışık olur çünkü 12'ye bölünebilmesi için hem3'e hem 4'e bölünecek. Orada bir sürü çok fazla işlem yapmamız lazım. Hepsini kontrol edebilmek için yani"* ifadesinde bulunmuştur. Araştırmacı "*peki bunu her zaman kullana bilir miyiz?"* sorusu üzerine, ÖA2 "*Hayır. Burada o özel sayıyı yakalamaya çalışıyorum ben."* açıklamasında bulunmuştur. Ayrıca ÖA2 bu düşüncesini şimdi geliştirdiğini belirtmiştir. Kendince geliştirmiş olduğu bu düşüncesinden emin olmak için Şekil 7c' deki gibi başka bir özel sayı daha alarak deneme yapmış ve cevabı sonlandırmıştır.

ÖA2'nin bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse; ÖA2 soruyu okuduktan sonra ilk olarak 11 ile bölünebilme kuralını hatırlamaya çalışmıştır. Bölünebilme kuralını hatırlamak için ise önce beş basamaklı palindromik sayı almış ve emin olamayarak hatırlamış olduğu kuralı bu sayıya uygulamıştır. Çıkan sonuç beklentisini karşılamayınca duraksamış ve vermiş olduğu sayının dört basamaklı palindromik olmadığını fark ederek başka bir özel sayı (1331) almıştır. Bu sayıya tekrar 11 ile bölünebilme (+,-) kuralını uygulamış ve çıkan sonuç beklentisini karşılayınca kuralın bu olduğu kanaatine varmıştır. Daha sonra Şekil 6c'deki gibi ifade ederek soruyu cevaplandırmıştır. Araştırmacının "*başka farklı biçimlerde çözebilir misiniz?*" sorusu üzerine, ÖA2 yeni bir kural geliştirmiştir ve bu kuralını göstermek adına farklı özel değerler alarak kuralını açıklamıştır. Görüldüğü üzere, ÖA2'nin soruyu okuduktan sonra ilk olarak aklına gelen 11 ile bölünebilme kuralı olmuştur. Bu düşüncesinden hareketle 11 ile bölünebilme kuralını hatırlama arayışı içine girdiği söylenebilir. Daha sonra bu arayış esnasında "12321" ve "1331" şeklinde özel değerler alarak emin olmayarak hatırlamış olduğu kuralı sayılar üzerinde uygulamıştır. Burada ÖA2 düşüncelerinin doğruluğunu göstermek, emin olmak adına özelleştirme gerçekleştirdiği söylenebilir. 10 ile bölünebilme kuralından yola çıkarak 11 ile bölünebilen ve dört basamaklı palindromik sayılar inşa etmeye başlamıştır. Bu inşa ettiği sayıları (düşüncesini) özel değerler kullanarak göstermiştir. Kısacası ÖA2 özelleştirmeyi daha çok, var olan düşüncelerini göstermek adına gerçekleştirdiği söylenebilir.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Palindromik sayılar sorusu sayısal örnekler yardımı ile özel durumlardan yola çıkılarak çözülebileceği gibi özelleştirme yapmadan cebirsel ifade yazarak da çözülebilmektedir. Mason vd. (2010) ifade ettiği gibi bu soruda özelleştirme, soruyu anlamak, bir palindromik sayı hakkında fikir edinmek, verilen ifadenin doğruluğunu test etmek, 4 basamaklı bir palindromik sayıyı keşfetmek, en küçük palindromik sayı ile bir sonraki palindromik sayı arasındaki ilişkiyi görmek, iddianın doğruluğu ile ilgili güven kazanmak için yardımcı olabilir. Bununla birlikte sistematik özelleştirmede bir örüntü bulmada, sonucun niçin doğru olduğu hakkında fikir sahibi olmada daha sonrasında ise örüntünün doğru olup olmadığını test etmede kullanılabilir. Bunun yanı sıra dört basamaklı palindromik sayıyı ABBA şeklinde yazarak da kolaylıkla çözülebilir. Bu tarzdaki çözümler, dört basamaklı palindromik sayılara genel bir argüman uygulandığı için özelleştirmenin delillerini sunmayacaktır. Ayrıca Mason vd. (2010) ifade ettiği gibi bu sorunun başka önemli yönleri de vardır. Öncelikle randomdan ziyade, sistematik özelleştirme örüntü bulma açısından önemlidir. Tüm bunlar göz önüne alındığında katılımcıları birlikte değerlendirmek, süreç boyunca benzer ya da farklı davranışları ortaya çıkarmak için önemlidir. Katılımcıların sorunun çözümü esnasında kullandıkları düşünme yaklaşımları ve gerçekleştirdikleri yöntemler sırası ile;

A1: Ters örnek bulmaya çalışma – ters örneği özelleştirme (1221) – özel değere 11 ile bölünebilme kuralını uygulama–palindromik sayıyı cebirsel ifade (aaaaabba) etme–cebirsel ifadeye 11 ile bölünebilme kuralını uygulama–sistematik özelleştirme düşüncesi ve özelleştirme

Ö1: palindromik sayıyı cebirsel ifade (abba)–cebirsel ifadeye 11 ile bölünebilme kuralı uygulama–çözümleme yapma

Ö2: palindromik sayıyı özelleştirme (1221)–özel değere 11 ile bölünebilme kuralını uygulama–özel değeri 11 ile bölme-farklı örnekler ile gösterme (3003, 5335)

ÖA1: Palindromik sayıyı özelleştirme yaparsa çok sayı denemesi gerektiğini fark etme–11 ile bölünebilme kuralı hatırlama için özelleştirme–palindromik özel değere 11 ile bölünebilme kuralını uygulama (+,-,+,-) –palindromik sayıyı cebirsel ifade (abba)– çözümleme

ÖA2: 11 ile bölünebilme kuralını hatırlama için özelleştirme–palindromik sayıyı özelleştirme (1331)–palindromik sayıya 11 ile bölünebilme kuralı uygulama (+,-,+,-) –yeni kural bulma–kuralı özelleştirme–özel değere kuralını uygulama.

Buradan görüldüğü üzere Ö1 palindromik sayıyı cebirsel (genel) olarak ifade etmiş hiçbir özel değer almamış yani özelleştirme yapmamıştır. Aynı şekilde ÖA1 de bakılacak örnek sayısının fazla olmasında yola çıkarak 11 ile bölünebilme kuralındaki (+,-,+,-) işaretlemesinden yola çıkarak sonuca ulaşmıştır. Bu anlamda iki katılımcıda benzer şekilde özel örneklere yer vermeden özelleştirme yapmadan sonuca ulaşmışlardır. Burada sistematik özelleştirmeyi sadece ÖA1 in gerçekleştirdiği söylenebilir. ÖA1 dışında katılımcılar almış oldukları özel değerleri ise rastgele seçmişlerdir. Ö1 ve ÖA1'in aksine Ö2 de birkaç özel değer almış cebirsel ifade hiçbir şekilde kullanmamıştır. A1 ile ÖA2 ise benzer şekillerde çözmeye çalışmışlardır. Özel bir örnekten yola çıkarak 11 ile bölünebilme kuralını uygulayıp cebirsel ifade ile sonuca ulaşmışlardır. Burada A1 diğerlerinden farklı olarak ters bir örnek bulma (aksi örnek bulma) ile sorunun çözümüne yaklaşmıştır. Bu bulgular Mason vd. (2010) soruyu anlamak, bir palindromik sayı hakkında fikir edinmek verilen ifadenin doğruluğunu test etmek, 4 basamaklı bir palindromik sayıyı keşfetmek, en küçük palindromik sayı ile bir sonraki palindromik sayı arasındaki ilişkiyi görmek, iddianın doğruluğu ile ilgili güven kazanmak için özelleştirmeyi kullandıklarını desteklemektedir.

Ayrıca katılımcıların ilk akıllarına gelen düşüncelerinden sonra araştırmacının "*sorunun çözümünü daha başka şekillerde cevaplandırabilir misiniz*?" sorusu üzerine, katılımcıların verdikleri cevaplar ve düşünceleri sırası ile; A1: sistematik özelleştirme, Ö1: çözümleme, Ö2: 11 ile bölme, ÖA1: cebirsel ifade ve çözümleme, ÖA2: 10 ile bölünebilme ve palindromik sayıdan yola çıkarak farklı bir kural geliştirme şeklinde olmuştur. Aslında bu bulguyu Keskin vd. (2013) bulguları desteklemektedir. Keskin vd. 82013) öğrencilerin özelleştirme ile ilgili sorularını yapmada sıkıntı çekmedikleri bunun nedenini ise hem ilköğretim hem ortaöğretimde işlemsel bilgiye yönelik çalışmaların üzerinde durulması olarak açıklamıştır. Alt kademelerde özelleştirme daha yaygın iken daha üst kademlerde kuralların öğrenilmesi ile genelleştirme becerisine geçişler daha fazla olduğu söylenebilir. Bu anlamda düşünüldüğünde yapılacak çalışmalarda öğrenci ve öğretmenlerin düşünme süreçlerinin karşılaştırıldığı çalışmalara ihtiyaç olduğu düşünülmektedir.

KAYNAKÇA

Alkan, H. & Bukova Güzel, E. (2005). Öğretmen adaylarında matematiksel düşünmenin gelişimi. Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 25(3), 221-236.

Alkan, H. & Tataroğlu Taşdan, B. (2011). Farklı sınıf düzeylerindeki matematik öğretmen adaylarının gözünden matematiksel düşünme. İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi Ağustos, cilt. 12, sayı. 2, ss. 107-137.

Arslan, S. & Yıldız, C. (2010) 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar. Eğitim Ve Bilim, 35 (156).

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. Educational Studies İn Mathematics." 18, 147-146.

Burton, L. (1984). Mathematical Thinking: The Strugglef Or Meaning. Journal of Researching Mathematics Education, Vol. 15(1), 35-49.

Dunlap, J. (2001). Mathematical Thinking. Web: http://Ctzalehamn-Mathematical Thinking.

Hacısalihoğlu, H., Mirasyedioğlu, Ş. &Akpınar, A. (2003). Matematik öğretimi: matematikte yapılandırıcı öğrenme ve öğretme. Ankara: Asil Yayın Dağıtım.

Henderson, P. (2002). Materials Development In Support Of Mathematical Thinking. (2017, Mart 22).

Kashefi, H., Zaleha Ismail., Yudariah Mohd Yusof, & Roselainy Abd. Rahman. (2012). Fostering Mathematical Thinking in the Learning of Multivariable Calculus through Computer-Based Tools, 4th World Conference on Educational Sciences, WCES 2012, A Paper Accepted to be published in Procedia - Social and Behavioral Sciences

Keskin, M., Akbaba Dağ, S. &Altun, M. (2013). 8. ve 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme aşamalarındaki davranışlarının karşılaştırılması. Journel Of Educational Sciences. 33-50.

Liu, P. H. (2003). Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching?. The Mathematics Teacher, 96(6), 416-421.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (2010). Thinking Mathematically. Second Edition.

Stacey, K. , Burton, L. & Mason J. (1985), Thinking Mathematically, Bristol, Addison-Wesley Publishing Company.

Tall, D. (2002). "Advanced Mathematical Thinking. Usa: Kluwer Academic Publishers

Tural, H. (2005). İlköğretim matematik öğretiminde oyun ve etkinliklerle öğretimin erişi ve tutuma etkisi. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.

Umay, A. (1992). Matematiksel düşünmede süreci ve sonucu yoklayan testler arasında bir karşılaştırma. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.